Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 9 **SoSe 2015** **16./17.06.2015**

[P23] Matrixelemente des harmonischen Oszillators

Bei der Diskussion des eindimensionalen harmonischen Oszillators wurden die Operatoren

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Xi + \mathrm{i}\Pi), \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Xi - \mathrm{i}\Pi)$$

mit der Wirkung

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

eingeführt. Dabei bezeichnet der Zustand $|n\rangle$ einen Eigenzustand des Hamiltonoperators, und es gilt $\langle l|m\rangle = \delta_{l,m}$.

Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle l|\Omega|m\rangle$ für $\Omega \in \left\{aa^\dagger, a^\dagger a, \Xi, \Pi, \Xi^2, \Pi^2, \{\Xi, \Pi\}\right\}$.

[P24] Zweidimensionaler isotroper harmonischer Oszillator

Der Hamiltonoperator für den zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator lautet in geeigneten Einheiten

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(P_i^2 + Q_i^2\right).$$

(a) Führen Sie Leiteroperatoren $a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_i - \mathrm{i}Q_i)$ ein und stellen Sie deren Vertauschungsrelationen auf. Der Grundzustand $|0,0\rangle$ ist definiert durch $a_i|0,0\rangle = 0$ für $i = 1,2$. Konstruieren Sie die Eigenzustände $|n_1, n_2\rangle$ von H und bestimmen Sie die Energieeigenwerte. Diskutieren Sie die Entartung.

(b) Untersuchen Sie den Drehimpulsoperator

$$L = \hbar(Q_1P_2 - Q_2P_1),$$

indem Sie Operatoren $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - \mathrm{i}a_2)$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + \mathrm{i}a_2)$ einführen. Stellen Sie deren Vertauschungsrelationen auf und drücken Sie den Drehimpulsoperator durch die neuen Operatoren aus. Konstruieren Sie nun simultane Eigenzustände $|m_1, m_2\rangle$ zu $b_1^\dagger b_1$ und $b_2^\dagger b_2$ bzw. zu H und L. Welche Drehimpulse sind bei vorgegebener Energie möglich?